

Datum: 02.11.2022

Beispielausarbeitung

Aufgabe 1: Distanzmessung mit dem Stahlmessband

1.a) Distanzmessung im ebenen Gelände

Bevor die Distanz zwischen zwei Punkten mit dem Stahlmessband gemessen werden kann, muss nach Paffenholz (2022, S. 12) als Erstes der Anfangspunkt und der Endpunkt der Messungslinie jeweils durch eine Fluchtstange markiert werden. Danach hält der erste Messgehilfe das Nullende des Messbandes an den Anfangspunkt der Messungslinie und der zweite Messgehilfe geht mit dem Ende des Messbandes zum Endpunkt der Messungslinie. Das Stahlmessband liegt bei ebenem Gelände während der Messung auf dem Boden auf und während der Messung ist es mit seiner Sollzugspannung straff zu ziehen (vgl. Paffenholz 2022, S. 14). Hierzu sollte das Messband kurz vor der Messung angehoben und dann straffgezogen werden. Anschließend kann die Ablesung auf dem Messband erfolgen. Hierfür müssen die beiden Messgehilfen nach Paffenholz (2022, S. 14) parallel auf das Messband schauen, damit eine durch die Parallaxe verursachte fehlerhafte Ablesung vermieden wird. Im Fall, dass eine Messungslinie länger als das Messband ist, kann die Distanz zwischen den zwei Punkten nur noch mit Hilfe des Staffelverfahrens bestimmt werden. Die Erläuterung dieses Verfahrens erfolgt im nächsten Aufgabenteil und wird deswegen an dieser Stelle nicht weiter erläutert.

1.b) Distanzmessung im geneigten Gelände

Bei der Messung mit dem Stahlmessband im geneigten Gelände ist nach Paffenholz (2022, S. 20) zu beachten, dass möglichst vom höheren zum niedrigeren Punkt gemessen wird. Der Grund hierfür lässt sich in Abb. 1 erkennen, wo eine Distanzmessung im geneigten Gelände beispielhaft dargestellt ist. Da in der Regel die horizontale Distanz d_h und nicht die Schrägdistanz zwischen den beiden Punkten bestimmt werden soll, muss das Ende vom Messband zum tieferen Punkt abgelotet werden. Dabei ist es während der Messung deutlich einfacher den Nullpunkt des Messbandes „ebenerdig“ an den Anfangspunkt anzuhalten und die Ablesung der Streckenlänge am Messband mit Hilfe des Lots am Endpunkt zu realisieren.

Außerdem tritt bei der Distanzmessung im geneigten Gelände mit dem Messband häufig noch eine zweite Herausforderung auf. Diese Herausforderung liegt immer dann vor, wenn sich die horizontale Distanz mit dem Messband aufgrund eines zu großen Höhenunterschieds zwischen dem Anfangspunkt P1 und Endpunkt P2 nicht in einem Stück messen lässt. Der in Paffenholz (2022, S. 20) vorgeschlagene Ansatz zur Lösung dieser Herausforderung besteht darin, die Distanz mit Hilfe des in Abb. 1 dargestellten Staffelverfahrens zu bestimmen. Hierfür werden als Erstes wieder wie im Aufgabenteil 1.a) der Anfangspunkt P1 und der Endpunkt P2 durch Fluchtstangen markiert. Anschließend hält der erste Messgehilfe das Nullende an den Anfangspunkt P1 und der zweite Messgehilfe geht mit dem Messband so weit in Richtung des Endpunktes P2, dass für ihn noch eine zuverlässige Ablesung am Messband möglich ist. Bei der Messung des ersten Teilstücks von der Distanz d_h in Abb. 1 steht der erste Messgehilfe am Punkt A_1 und der zweite Messgehilfe am Punkt E_1 . Der dritte Messgehilfe weist dann den zweiten Messgehilfe in die Flucht zwischen P1 und P2 ein. Danach stellt sich der dritte Messgehilfe parallel zum Messband und gibt dem zweiten Messgehilfen Anweisungen, bis dieser das Messband horizontal hält. Wenn alle diese Bedingungen erfüllt sind, dann lotet der zweite Messgehilfe seinen aktuellen Standpunkt mit dem Lot ab. Dieser Punkt wird mit einer Zähl-nadel markiert und entspricht in Abb. 1 dem Endpunkt E_1 . Im Anschluss wird dann das zweite Teilstück von der Distanz d_h nach demselben Ablauf wie beim ersten Teilstück gemessen.

Dieser Ablauf wird solange wiederholt, bis alle Teilstücke zwischen dem Anfangspunkt P1 und dem Endpunkt P2 gemessen sind. Die Summe dieser gemessenen Teilstücke ergibt dann die zu bestimmende Distanz d_H .

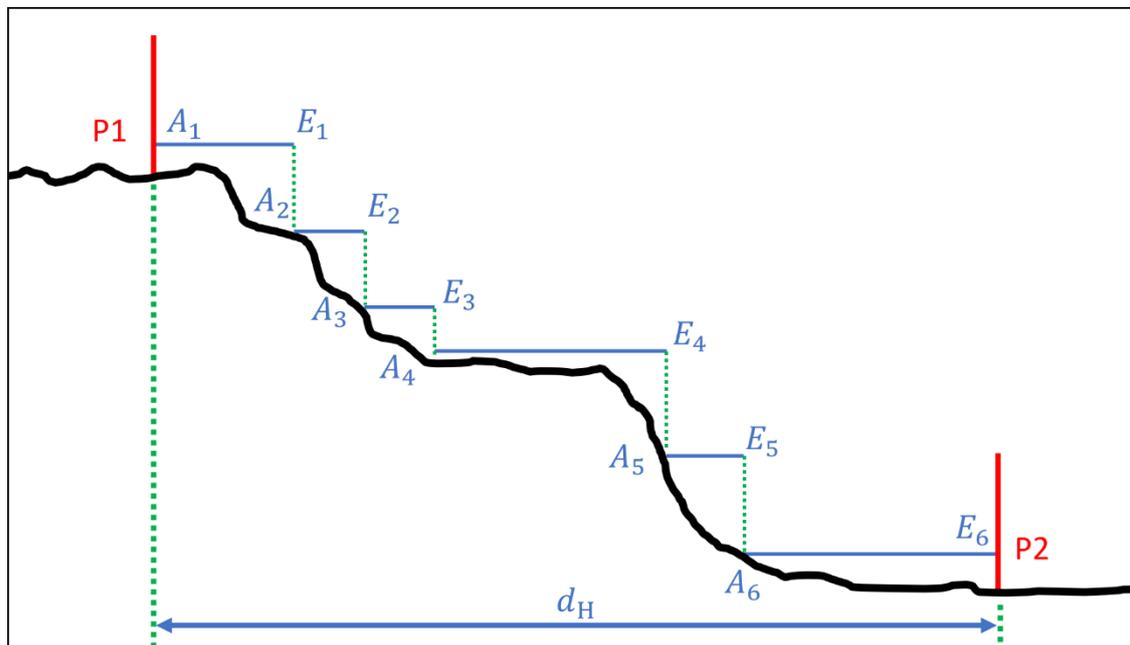


Abbildung 1: Schematischer Ablauf einer Staffelmessung mit dem Messband im geneigten Gelände.
(nach Kahmen (1997, S. 151))

Tabelle 1: Gemessene Werte im praktischen Teil der Hausübung.

d_1 [m]	d_2 [m]	d_3 [m]	d_4 [m]	Temperatur [°C]
39,997	39,995	39,999	40,006	12,9

Aufgabe 2: Auswertung der Distanzmessung

2.a) Mittelwert und Standardabweichung für die gemessenen Distanzen

In diesem Aufgabenteil soll die gemittelte Distanz \bar{d} und die dazugehörige empirische Standardabweichung s_d aus den im Aufgabenteil 1.c) gemessenen Distanzen d_i berechnet werden. Der Mittelwert lässt sich nach Paffenholtz (2022, S. 110) mit

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i \quad \text{GL. 1}$$

berechnen, wobei die Variable n hier die Anzahl der beobachteten Distanzen d_i angibt. Die gemittelte Distanz ergibt sich dann durch das Einsetzen der in Tab. 1 dargestellten Messwerte in GL. 1. Hieraus folgt:

$$\bar{d} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 d_i = \frac{159,997 \text{ m}}{4} \approx 39,9993 \text{ m}.$$

Das Mittel aus den vier gemessenen Distanzen beträgt somit $39,9993 \text{ m}$. Dieses Ergebnis wird in der Berechnung auf vier Nachkommastellen gerundet, weil die Distanzen d_i auf drei Nachkommastellen genau gemessen werden (vgl. Paffenholtz 2022, S. 111).

Damit die empirische Standardabweichung s_d berechnet werden kann, muss zuvor die empirische Varianz s_d^2 bestimmt werden. Diese ergibt sich nach Paffenholtz (2022, S. 120) aus

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2. \quad \text{GL. 2}$$

Die empirische Standardabweichung folgt dann aus (vgl. Paffenholtz 2022, S. 121)

$$s_d = +\sqrt{s_d^2}. \quad \text{GL. 3}$$

Zur Berechnung der empirischen Varianz werden jetzt in GL. 2 die in Tab. 1 dargestellten Messwerte sowie das zuvor berechnete Ergebnis für die gemittelte Distanz \bar{d} eingesetzt, woraus folgt:

$$s_d^2 = \frac{1}{4-1} \sum_{i=1}^4 (d_i - 39,9993 \text{ m})^2 = \frac{5,29 \cdot 10^{-6} + 18,49 \cdot 10^{-6} + 0,09 \cdot 10^{-6} + 44,89 \cdot 10^{-6}}{4-1} \text{ m}^2$$

$$s_d^2 = \frac{68,76 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{4-1} = 2,292 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

Anschließend wird das berechnete Ergebnis s_d^2 in GL. 3 eingesetzt, woraus sich die empirische Standardabweichung mit

$$s_d = \sqrt{2,292 \cdot 10^{-5}} = 0,0048 \text{ m}$$

ergibt.

2.b) Bewertung des Messergebnisses

Die im Aufgabenteil 2.a) berechnete empirische Standardabweichung beträgt $s_d = 4,8 \text{ mm}$. Dieser Wert ist $0,2 \text{ mm}$ kleiner als die vom Hersteller angegebene Messpräzision mit $\sigma = 5 \text{ mm}$ für das Stahlmessband. Bei den im Aufgabenteil 1.c) gemessenen Distanzen d_i wurde somit die mögliche Messpräzision mit dem Stahlmessband erreicht. Hieraus kann geschlossen werden, dass in den gemessenen Distanzen zumindest kein signifikant feststellbarer Ausreißer enthalten ist.

Aufgabe 3: Untersuchung des Einflusses von der Temperatur auf die Distanzmessung mit dem Stahlmessband

3.a) Berechnung des Korrelationskoeffizienten

In diesem Aufgabenteil soll untersucht werden, ob zwischen der Temperatur und den gemessenen Distanzen mit dem Stahlmessband Abhängigkeiten existieren. Um eine evtl. existierende Abhängigkeit zwischen diesen beiden Parametern aufdecken zu können, wurden in der Aufgabenstellung eine Messreihe x_i für die Distanz und eine Messreihe y_i für die Temperatur zur Verfügung gestellt. Aus diesen beiden Messreihen soll der Korrelationskoeffizient r_{xy} berechnet werden. Hierfür muss nach Paffenholz (2022, S. 140) zuerst die empirische Kovarianz s_{xy} mit

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})] \quad \text{GL. 4}$$

berechnet werden. Zur Schätzung von s_{xy} werden in GL. 4 die Mittelwerte \bar{x} und \bar{y} von den beiden Messreihen benötigt, die sich aus den Beobachtungen x_i und y_i mit GL. 1 bestimmen lassen. Der Korrelationskoeffizient r_{xy} ergibt sich dann nach Paffenholz (2022, S. 140) aus der empirischen Kovarianz s_{xy} mit

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}, \quad \text{GL. 5}$$

wobei die hierfür benötigten Standardabweichungen s_x und s_y der Messreihen nach GL. 3 zu berechnen sind. Für eine übersichtliche Darstellung der einzelnen Berechnungsschritte zur Bestimmung des Korrelationskoeffizient r_{xy} wird die in Paffenholz (2022, S. 145) vorgeschlagene Tabelle verwendet. In Tab. 2 werden hierfür die in der Aufgabenstellung gegebenen Werte der Messreihen in die Spalten x_i und y_i eingetragen, wobei die Messwerte der Distanzen in Zentimeter umgewandelt werden. Außerdem wird für den Monat Oktober für x_{10} der in Aufgabenteil 2.a) berechnete Mittelwert $\bar{d} = 3999,93 \text{ cm}$ und für y_{10} die Temperatur aus Tab. 1 eingetragen.

Anschließend werden die übrigen Spalten \bar{x} , \bar{y} , $x_i - \bar{x}$, $y_i - \bar{y}$, $(x_i - \bar{x})^2$, $(y_i - \bar{y})^2$ sowie $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ mit den zuvor eingeführten Gleichungen berechnet. Aus den berechneten Summen in der Zeile Σ von Tab. 2 lassen sich dann mit Gl. 2, Gl. 3 und Gl. 4 die Standardabweichungen der Messreihen sowie die empirische Kovarianz wie folgt berechnen:

$$s_{xy} = \frac{82,1850 \text{ cm } ^\circ\text{C}}{10 - 1} = 9,13 \text{ cm } ^\circ\text{C}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{5,0880 \text{ cm}^2}{10 - 1}} = 0,75 \text{ cm}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1525,1690 \text{ } ^\circ\text{C}^2}{10 - 1}} = 13,02 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Aus diesen Ergebnissen wird anschließend nach Gl. 5 der Korrelationskoeffizient wie folgt

$$r_{xy} = \frac{9,13 \text{ cm } ^\circ\text{C}}{0,75 \text{ cm} \cdot 13,02 \text{ } ^\circ\text{C}} = 0,935$$

berechnet. Die Korrelation zwischen den beobachteten Distanzen und Temperaturen beträgt somit 93,5%.

Tabelle 2: Berechnung des Korrelationskoeffizienten nach Pearson. Die Formeln in der ersten Zeile zur Berechnung der Spalten stammen aus Paffenholz (2022, S. 145).

i	x_i	\bar{x}	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	\bar{y}	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	3998,63	3999,79	-1,16	1,3456	-2,7	15,11	-17,81	317,1961	20,6596
2	3998,50		-1,29	1,6641	-5,3		-20,41	416,5681	26,3289
3	3999,40		-0,39	0,1521	4,8		-10,31	106,2961	4,0209
4	3999,53		-0,26	0,0676	12,0		-3,11	9,6721	0,8086
5	4000,40		0,61	0,3721	24,6		9,49	90,0601	5,7889
6	4000,15		0,36	0,1296	28,4		13,29	176,6241	4,7844
7	4000,35		0,56	0,3136	30,3		15,19	230,7361	8,5064
8	4000,53		0,74	0,5476	27,9		12,79	163,5841	9,4646
9	4000,48		0,69	0,4761	18,2		3,09	9,5481	2,1321
10	3999,93		0,14	0,0196	12,9		-2,21	4,8841	-0,3094
Σ	39997,90	—	—	5,0880	151,1	—	—	1525,1690	82,1850

3.b) Interpretation des Ergebnisses aus Aufgabe 3.a)

Anhand des zuvor berechneten Korrelationskoeffizienten mit $r_{xy} = 93,5\%$ wird offensichtlich, dass die mit dem Stahlmessband gemessenen Distanzen sehr stark von der Temperatur abhängig sind. Dieser kausale Zusammenhang entsteht dadurch, dass sich das Stahlmessband aufgrund der Temperaturänderungen ausdehnt und zusammenzieht. Das Messergebnis der Distanzmessung wird also durch den Einfluss der Temperatur systematisch verfälscht. Aus diesem Grund muss eine mit dem Stahlmessband gemessene Distanz immer mit Hilfe des Ausdehnungskoeffizienten α für Stahl korrigiert werden (vgl. Paffenholz 2022, S. 60).

Literaturverzeichnis

Kahmen, H. (1997): *Vermessungskunde*, 19. Auflage, De Gruyter, Berlin & New York, 1997, ISBN: 3-11-015399-8.

Paffenholz, J.-A. (2022): *Vorlesung Geo-Sensorik und terrestrische Punktbestimmung*, Institute of Geo-Engineering, TU Clausthal, Sommersemester 2022.

Dorndorf, A. (2022): *Vorlesung Statistische Auswertemethoden im Geo-Engineering*, Institute of Geo-Engineering, TU Clausthal, Sommersemester 2022.

Richter (2022): *Maßbandspanner Typ 550*, Friedrich Richter Messwerkzeuge GmbH & Co. KG, Speichersdorf, URL: <https://www.richter-messzeuge.de/produkte/bandmasse/zubehoer>, letzter Zugriff: 24.10.2022

Comment:

Please use (Autor, Year), like (Kersten and Paffenholz, 2020) or (Paffenholz et al., 2020) for citing your references in the text.

More examples:

Kersten, T.; Paffenholz, J.-A. (2020): Feasibility of consumer grade GNSS receivers for the integration in multi-sensor-systems. *Sensors*, Vol. 20, No. 9, 2463, 2020. doi: 10.3390/s20092463.

Paffenholz, J.-A.; von Gösseln, I.; Bureick, J.; Diener, D.; Reifenhäuser, M.; Neumann, I. (2020): Hochpräzises und hochfrequentes Monitoring eines weltweit einmaligen Gleisverwerfungsversuches. In: Thomas Wunderlich (Hrsg.): *Ingenieurvermessung 20. Beiträge zum 19. Internationalen Ingenieurvermessungskurs München*, 2020. 1. Neuerscheinung. Berlin: Wichmann, H; Wichmann Verlag, S. 339–354.

Paffenholz, J.-A.; Steinhoff-Knopp, B.; Harmening, C. (2021): 3D point cloud based spatio-temporal monitoring of natural objects. *Proceedings of the FIG e-Working Week -Smart surveyors for land and water management – Challenges in a new reality -*, available via www.fig.net, The Netherlands, 2021.

Alkhatib, H.; Paffenholz, J.-A. (Hrsg.): *Tagungsband GeoMonitoring 2019*. GeoMonitoring. Hannover, 14-15 März, 2019. (Online verfügbar unter: www.repo.uni-hannover.de/handle/123456789/4548)